Linear Algebra

[KOMS120301] - 2023/2024

15.2 - Gram-Schmidt & Dekomposisi-QR

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 15 (Desember 2023)

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Tujuan pembelajaran

Setelah perkuliahan ini, Anda diharapkan mampu:

1. menjelaskan konsep himpunan ortogonal dan himpunan ortonormal;
2. jelaskan prosedur Gram-Schmidt;
3. melakukan prosedur Gram-Schmidt untuk mendapatkan basis ortonormal;
4. menjelaskan prosedur dekomposisi QR;
5. menemukan dekomposisi QR dari sebuah matriks.

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Bagian 1: Himpunan ortogonal dan ortonormal

Himpunan ortogonal dan ortonormal

Misalkan S adalah himpunan dua vektor atau lebih pada ruang hasilkali dalam riil. Kemudian:

- S dikatakan ortogonal jika semua pasangan vektor berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal.
- S dikatakan orthonormal jika S ortogonal dan $\forall v \in S$, $\|v\| = 1$.

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Mengapa kita memerlukan himpunan ortogonal atau himpunan ortonormal?

Referensi: `https://www.youtube.com/watch?v=SWbis2zWIvo`

Tugas: Temukan contoh yang menunjukkan pentingnya himpunan ortogonal atau ortonormal dalam Aljabar Linier.

Vektor yang diberikan dalam $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, -1)$$

dengan produk dalam Euclidean. Apakah himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonal?

Contoh 1: Orthogonal sets

Vektor yang diberikan dalam $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, -1)$$

dengan produk dalam Euclidean. Apakah himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonal?

Solusi:

Tunjukkan bahwa $\|\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\| = 0$, $\|\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\| = 0$, dan $\|\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\| = 0$.

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Contoh 2: Membangun himpunan ortonormal dari himpunan ortogonal

Dari contoh sebelumnya, kita melihat bahwa $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merupakan himpunan ortogonal. Bagaimana cara membuat himpunan ortonormal darinya?

- Norma Euclidean tentang vektor:

$$\|\mathbf{v}_1\| = 1, \ \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2}, \ \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{2}$$

- Menormalkan hasil $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- Verifikasilah:

$$\|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\| = \|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\| = \|\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\| = 0, \quad \text{and}$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = 1, \ \|\mathbf{v}_2\| = 1, \ \|\mathbf{v}_3\| = 1$$

Oleh karena itu, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ adalah himpunan ortonormal.

Latihan

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Bagian 2: Proses Gram-Schmidt

Teorema (Basis ortogonal & basis ortonormal)

1. *Jika* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *adalah basis ortogonal untuk ruang hasil kali dalam* V*, dan jika* u *adalah vektor apa pun di* V*, maka:*

$$\mathbf{u} = \frac{\|\mathbf{u}, \mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\|\mathbf{u}, \mathbf{v}_2\|}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\|\mathbf{u}, \mathbf{v}_n\|}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n$$

2. *Jika* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *adalah basis orthonormal untuk ruang hasil kali dalam* V*, dan jika* u *adalah vektor apa pun di* V*, maka:*

$$\mathbf{u} = \|\mathbf{u}, \mathbf{v}_1\|\mathbf{v}_1 + \|\mathbf{u}, \mathbf{v}_2\|\mathbf{v}_2 + \cdots + \|\mathbf{u}, \mathbf{v}_n\|\mathbf{v}_n$$

Apakah *orthonormal basis* selalu ada?

Teorema

Setiap ruang hasilkali dalam berdimensi hingga bukan nol mempunyai **basis ortonormal**.

Proses Gram-Schmidt (1)

Proses Gram-Schmidt adalah langkah konstruksi dai suatu basis ortogonal atau ortonormal.

The Gram–Schmidt Process

To convert a basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ into an orthogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, perform the following computations:

Step 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$

Step 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

Step 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

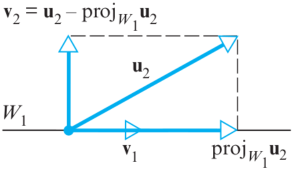
Step 4. $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$

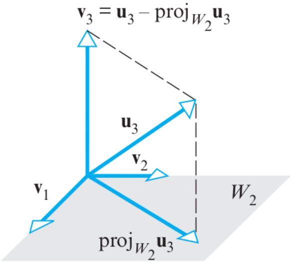
$$\vdots$$

(continue for r steps)

Optional Step. To convert the orthogonal basis into an orthonormal basis $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_r\}$, normalize the orthogonal basis vectors.

Proses Gram-Schmidt (2)





Contoh 1: Gram-Schmidt process

Given vectors in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1),\ \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$$

1. Transfom the basis vectors into an orthogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
2. Normalize the orthogonal basis to obtain an orthonormal basis $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$.

Contoh 1 solusi: Proses Gram-Schmidt

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1),\;\; \mathbf{u}_2 = (0,1,1),\;\; \mathbf{u}_3 = (0,0,1)$$

Langkah 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1,1,1)$

Langkah 2.
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 = \text{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\|\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$
$$= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Langkah 3.
$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3 - \frac{\|\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\|\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\|}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$
$$= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \;=\; \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Dengan demikian,

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1),\;\; \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\;\; \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Contoh 1 solusi: Normalisasi

Dari Proses Gram-Schmidt, diperoleh:

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Dengan demikian,

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Jadi, basis ortonormal untuk $\mathbb{R}^3$ is:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Memperluas himpunan ortogonal/ortonormal ke basis ortogonal/ortonormal

Teorema

Jika W adalah ruang hasil kali dalam berdimensi hingga, maka:

1. *Setiap himpunan ortogonal dari vektor bukan nol di W dapat diperbesar menjadi basis ortogonal untuk W.*
2. *Setiap himpunan ortonormal dalam W dapat diperbesar menjadi basis ortonormal sebesar W.*

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Latihan

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Bagian 3: Dekomposisi-QR

Konsep dekomposisi-QR (1)

Permasalahan

Jika

- A *adalah matriks* $m \times n$ *dengan vektor kolom bebas linier,*
- Q *adalah matriks yang dihasilkan dengan menerapkan Proses Gram-Schmidt pada vektor kolom* A*,*

Hubungan apa (jika ada) yang ada antara A *dan* Q*?*

Konsep dekomposisi-QR (1)

Permasalahan

Jika

- A *adalah matriks* $m \times n$ *dengan vektor kolom bebas linier,*
- Q *adalah matriks yang dihasilkan dengan menerapkan Proses Gram-Schmidt pada vektor kolom* A*,*

Hubungan apa (jika ada) yang ada antara A *dan* Q*?*

Misalkan: $A = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n]$ dan $Q = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_n]$

Dengan Teorema "Basis ortogonal & basis ortonormal" dapat dituliskan:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{u}_1 & = & \|\mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1\|\mathbf{q}_1 & + & \|\mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1\|\mathbf{q}_1 & + \cdots + & \|\mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n\|\mathbf{q}_n \\
\mathbf{u}_2 & = & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1\|\mathbf{q}_1 & + & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1\|\mathbf{q}_1 & + \cdots + & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n\|\mathbf{q}_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{u}_n & = & \|\mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1\|\mathbf{q}_1 & + & \|\mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1\|\mathbf{q}_1 & + \cdots + & \|\mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n\|\mathbf{q}_n
\end{array}$$

Konsep dekomposisi-QR (2)

Ini dapat ditulis dalam matriks:

$$[\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n] = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1\| & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1\| & \cdots & \|\mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1\| \\ \|\mathbf{u}_1, \mathbf{q}_2\| & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2\| & \cdots & \|\mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2\| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|\mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n\| & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n\| & \cdots & \|\mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n\| \end{bmatrix}$$

$$A = Q \quad R$$

Karena $\mathbf{q}_j$ ortogonal terhadap $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$, kita mempunyai:

$$R = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1\| & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1\| & \cdots & \|\mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1\| \\ 0 & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2\| & \cdots & \|\mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2\| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|\mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n\| \end{bmatrix}$$

Ini disebut dekomposisi-QR dari matriks A.

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Teorema

Jika A adalah matriks $m \times n$ dengan vektor kolom bebas linier, maka A dapat difaktorkan sebagai:

$$A = QR$$

dimana Q adalah matriks $m \times n$ dengan vektor kolom ortonormal, dan R adalah matriks segitiga atas yang dapat dibalik $n \times n$.

Remark.

- $Q = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_n]$ can be obtained from Gram-Schmidt process.
- The matrix R is the matrix as defined previously, which is an upper-triangular matrix whose entries are $\|\mathbf{u}_i, \mathbf{q}_j\|$ for some $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Contoh: Merumuskan dekomposisi-QR

Tentukan dekomposisi QR dari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Solusi:

Langkah 1. Tentukan vektor kolom dari A:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 2. Terapkan Proses Gram-Schmidt. Ini memberikan vektor ortonormal:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Langkah 3. Tentukan matriks R:

$$R = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1\| & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1\| & \|\mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1\| \\ 0 & \|\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2\| & \|\mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2\| \\ 0 & 0 & \|\mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu dekomposisi QR adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$A = Q \quad R$$

© Dewi Sintiari/CS Undiksha

Latihan

1. Tuliskan prosedur langkah-demi-langkah untuk menghitung dekomposisi QR suatu matriks.
2.

 © Dewi Sintiari/CS Undiksha

bersambung...